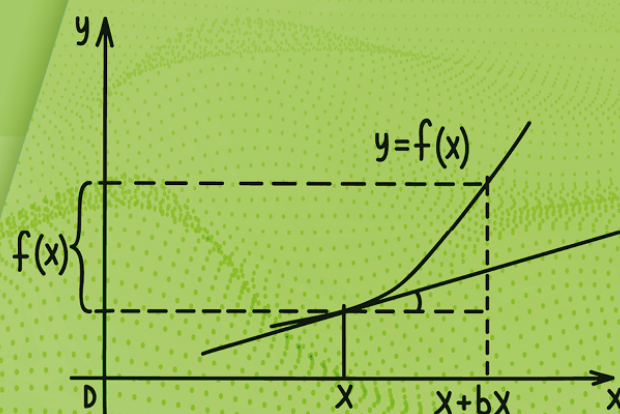


שאלון ג' מתמטיקה בהישג יד

חשבון דפרנציאלי



2018 דודו גולדשטיין

חוברת הלימוד של

נ ו ש א י ה ל י מ ו ד

7 - 2	שיפוע פונקציה בנקודה - נגזרת	<input type="radio"/>
11 - 8	משוואת המשיק	<input type="radio"/>
14 - 12	שיעורי נקודת השקה	<input type="radio"/>
18 - 15	נגזרת פונקציית שורש	<input type="radio"/>
23 - 19	נגזרת פונקציית מנה	<input type="radio"/>
27 - 24	התאמה בין גרף פונקציה ונגזרת הפונקציה	<input type="radio"/>
33 - 28	מציאת נקודות קיצון	<input type="radio"/>
46 - 34	חקירת פונקציות	<input type="radio"/>
54 - 47	תרגילי חזרה לבגרות	<input type="radio"/>

נ ו ס ח א ו ת

$$(X^n)' = n \cdot X^{n-1}$$

נגזרת פונקצית חזקה

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

נגזרת פונקצית שורש

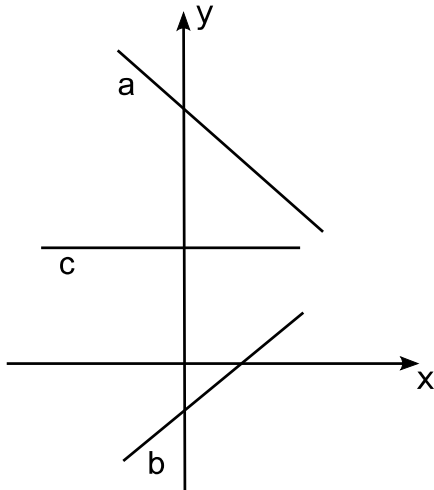
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

נגזרת פונקצית מנה

שיפוע פונקציה בנקודה - נגזרת

בפרק "גאומטריה אנליטית" חקרנו פונקציות של קווים ישרים ולמדנו על הקשר, בין שיפוע הפונקציה לבין גרף הפונקציה.

תזכורת



שיפוע הפונקציה $y = -1x + 7$ הוא -1 , והגרף שלה (a) "יורד".

שיפוע הפונקציה $y = 1x - 1$ הוא 1 , והגרף שלה (b) "עולה".

שיפוע הפונקציה $y = 3$ הוא 0 , והגרף שלה (c) "קבוע".

בחוברת זו, נקרא לשיפוע הפונקציה - נגזרת. סימון הנגזרת y' .



נגזרת הפונקציה $y = -1x + 7$ היא $y' = -1$.

נגזרת הפונקציה $y = 1x + 7$ היא $y' = 1$.

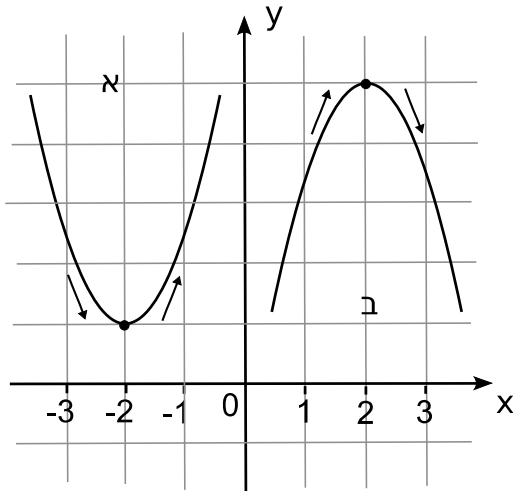
נגזרת הפונקציה $y = 3$ היא $y' = 0$.

רשמו את הנגזרות

(1) $y = 5x$	$y' = \underline{\hspace{2cm}}$	(4) $y = -6x$	$y' = \underline{\hspace{2cm}}$
(2) $y = 7$	$y' = \underline{\hspace{2cm}}$	(5) $y = -x$	$y' = \underline{\hspace{2cm}}$
(3) $y = x$	$y' = \underline{\hspace{2cm}}$	(6) $y = -2$	$y' = \underline{\hspace{2cm}}$

בפרק "פרבולות" חקרנו פונקציות ממעלה שנייה (פונקציות ריבועיות), ולמדנו למצוא תחומי עלייה וירידה.

תזכורת



בפרבולה א' הקודקוד נמצא ב $x = -2$.

הפונקציה יורדת בתחום $x < -2$, ועולה בתחום $x > -2$.

בפרבולה ב' הקודקוד נמצא ב $x = 2$.

הפונקציה עולה בתחום $x < 2$, ויורדת בתחום $x > 2$.

בניגוד לקו ישר, שיפוע הפרבולה משתנה מנקודה לנקודה.

במשך שנים חקרו מתמטיקאים שיפועי גרפים שאינם קו ישר. למעשה, כך נולד הנושא "חשבון



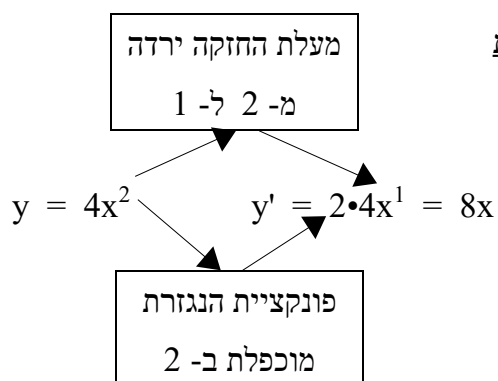
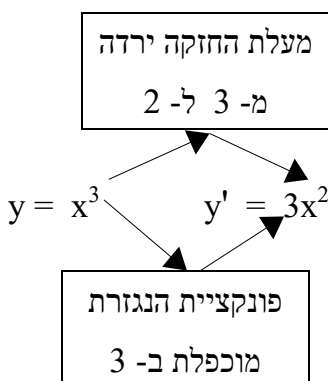
דפרנציאלי". בבסיסו נמצאת הנגזרת, שבאמצעותה מחשבים שיפועים של פונקציות.

נגזרת פונקצייה עם חזקה, היא גם פונקציה, שמעלתה קטנה ב-1 ממעלת הפונקציה



המקורית ושמוכפלת במעריך החזקה. **נוסחה** $(X^n)' = n \cdot X^{n-1}$!

דוגמאות



1) 5, 2) 0, 3) 1, 4) -6, 5) -1, 6) 0

גזרו את הפונקציות

(1) $y = x^4$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $y = 2x^5$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $y = x^2$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $y = 6x^3$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $y = x^3$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $y = -x^8$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $y = 4x^3$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(8) $y = -3x^2$ $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

ברישום פונקציות משתמשים באותיות נוספות ל- y . לדוגמה $f(x)$, $g(x)$ וכו'.



בגזירת פונקציה עם מספר איברים - גוזרים איבר איבר. לדוגמה



$$f(x) = 4x^3 - x^2 \rightarrow f'(x) = 12x^2 - 2x$$

גזרו את הפונקציות

(9) $f(x) = 2x^5 + 9x^2$

(11) $f(x) = 3x^2 - 4x - 3$

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) $f(x) = -x^3 - 5x^4$

(12) $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) $y = 2x^4 - 3x^2 - 5x$

$y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(15) $f(x) = -4x^3 - 2x + 1$

$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(14) $y = 4x^6 + 2x^3 - 2x^2$

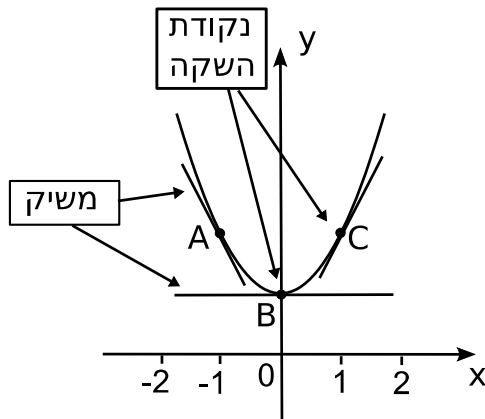
$y' = \underline{\hspace{2cm}}$

(16) $y = 3x^4 + x - 2$

$y' = \underline{\hspace{2cm}}$

משיק לפונקציה - ישר שנוגע בגרף הפונקציה בנקודת השקה,

ושיפועו שווה לנגזרת הפונקציה בנקודה זו.

נחשב שיפועי משיקים לגרף הפונקציה $y = x^2 + 1$

בשלושת הנקודות שבשרטוט.

נגזרת הפונקציה היא $y' = 2x$ לחישב שיפוע המשיק בנקודה A, מציבים בנגזרת $x = -1$ $m = 2 \cdot (-1) = -2$

שיפוע שלילי מתאים לירידה של גרף הפונקציה.

לחישב שיפוע המשיק בנקודה C, מציבים בנגזרת $x = 1$ $m = 2 \cdot (1) = 2$

שיפוע חיובי מתאים לעלייה של גרף הפונקציה.

לחישב שיפוע המשיק בנקודה B, מציבים בנגזרת $x = 0$ $m = 2 \cdot (0) = 0$

שיפוע 0 מתאים לנקודות קיצון.

(1) $4x^3$ (2) $2x$ (3) $3x^2$ (4) $12x^2$ (5) $10x^4$ (6) $18x^2$ (7) $-8x^7$

(8) $-6x$ (9) $10x^4 + 18x$ (10) $-3x^2 - 20x^3$ (11) $6x - 4$ (12) $6x^2 + 5$

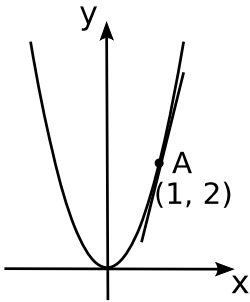
(13) $8x^3 - 6x - 5$ (14) $24x^5 + 6x^2 - 4x$ (15) $-12x^2 - 2$ (16) $12x^3 + 1$

$$m = f'(x)$$

פתרו בהתאם לדוגמה

מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה $y = 2x^2$

בנקודה $A(1, 2)$

**פתרון**

שלב I - גזירת הפונקציה

$$y' = 4x$$

שלב II - הצבה בנגזרת $x = 1$

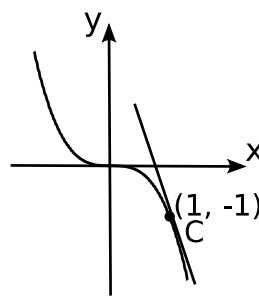
$$y' = 4 \cdot (1) = 4$$

תשובה

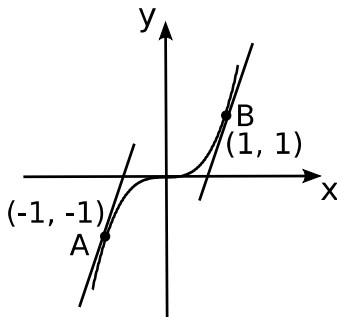
שיפוע המשיק בנקודה A : $m = 4$

חשבו את שיפוע המשיק לפונקציה $y = -x^3$

בנקודה $C(1, -1)$

**תשובה**

שיפוע המשיק בנקודה C : $m = -3$

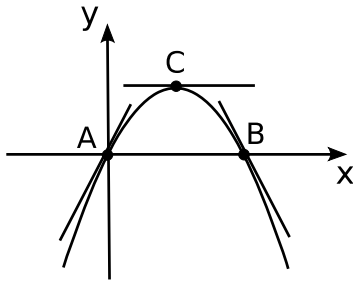
תרגול

(1) לגרף הפונקציה $y = x^3$ העבירו משיקים בנקודות A ו-B.

א. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה A.

ב. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה B.

ג. האם המשיקים מקבילים זה לזה? נמקו.



(2) גרף הפונקציה $f(x) = 2x - x^2$ חותך את ציר x

בנקודות $A(0, 0)$ ו- $B(2, 0)$.

א. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה A ,

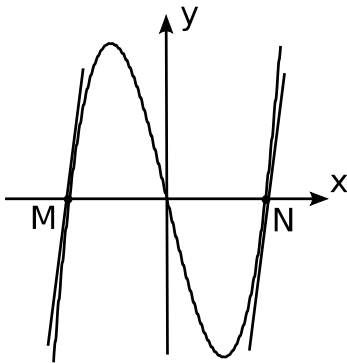
ורשמו האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה זו.

ב. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה B ,

ורשמו האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה זו.

קודקוד הפרבולה נמצא בנקודה $C(1, 1)$

ג. מצאו את שיפוע המשיק לפרבולה בנקודת הקודקוד.



(3) גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ חותך את ציר x

בנקודות $M(-2, 0)$ ו- $N(2, 0)$.

א. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה M .

ב. מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה N .

ג. הסבירו מדוע המשיקים מקבילים זה לזה.

(1) א. $m = 3$, ב. $m = 3$, ג. כן

(2) א. $m = 2$ עולה, ב. $m = -2$ יורדת, ג. $m = 0$, א. $m = 8$, ב. $m = 8$