

מתמטיקה בהישג יד

דודו גולדשטיין

תכנון לינארי



פיננסי כלכלי

חוברת לימוד ותרגול
ברמת 3 יחידות לימוד.

נושאי הלימוד

2.....	תכנון לינארי - הכרות
3.....	בניית תבנית אלגברית עם שני משתנים
5.....	כתיבת אילוצים
11.....	שרטוט אילוצים במערכת צירים
17.....	שימוש בפונקציית מטרה
25.....	מציאת נקודת מפגש בין ישרים
31.....	אילוצים קבועים
33.....	מציאת קודקודים במערכת אילוצים
46.....	תרגילי חזרה
57.....	תשובות

"הדרך לדעת היא לשאול , הדרך להתמודד היא לשתף."

תכנון לינארי - הכרות

תכנון לינארי הוא כלי המסייע למנהלים, מהנדסים, כלכלנים ואנשי מקצוע בקבלת החלטות וייעול בהקצאת משאבים.

משתמשים ב**תכנון לינארי** כאשר יש מספר אפשרויות, מגבלות ברורות, ורצון להגיע לתוצאה הטובה ביותר.

לתכנון לינארי שני מרכיבים מרכזיים:

○ **פונקציית מטרה** – מגדירים מה רוצים למקסם או למזער.

למשל: להגיע לרווח המרבי, או למזער עלויות ייצור.

○ **אילוצים** – הגבלות על המשאבים הזמינים.

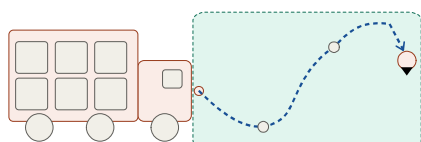
למשל: גודל תקציב, כמות חומרי גלם, או מספר שעות עבודה זמינות.



דוגמאות בחיי היום יום

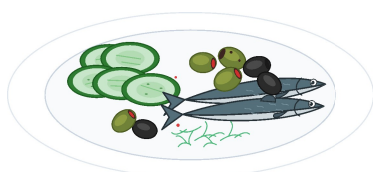
○ **ניהול השקעות:** חלוקת כספים בין אפיקי השקעה

(מניות, זהב וכו') כדי להגיע לתשואה מקסימלית.



○ **לוגיסטיקה:** תכנון מסלולי הובלת מוצרים

ללקוחות לחסכון בדלק וזמן.



○ **תזונה:** בחירת מאכלים שמספקים את

הוויטמינים הדרושים לגוף בעלות מינימלית.

(5) חקלאי מגדל שני סוגי ירקות: חצילים (x) ופלפלים (y). באמצעות מים ודשן.

בעונת גידול עומדים לרשותו 700 מ"ק מים ו- 200 ק"ג דשן.



בטבלה מוצגת כמות המים והדשן הדרושים

לגידול דונם חצילים ודונם פלפלים.

מים (מ"ק)	דשן (ק"ג)	
2	1	שיח חצילים
3	1	שיח פלפלים

(6) במאפייה מכינים סופגניות ועוגיות. לצורך כך משתמשים בקמח וריבה.

במחסן המאפייה יש מלאי זמין של 120 ק"ג קמח ו- 40 ק"ג ריבה.

לפניכם כמויות הקמח והריבה הדרושות לייצור תבנית סופגניות ותבנית עוגיות:

קמח (ק"ג)	ריבה (ק"ג)	
3	2	תבנית סופגניות
2	1	תבנית עוגיות

$$2x + 3y \leq 30 \quad 4x + 2y \leq 40 \quad (2) \quad 10x + 25y \leq 120 \quad 30x + 5y \leq 90 \quad (1)$$

$$5x + 6y \leq 200 \quad 2x + y \leq 50 \quad (4) \quad 5x + y \leq 120 \quad 14x + 3y \leq 300 \quad (3)$$

$$2x + y \leq 40 \quad 3x + 2y \leq 120 \quad (5) \quad x + y \leq 200 \quad 2x + 3y \leq 700 \quad (5)$$

דוגמה פתורה

בסדנה לייצור "כלי נגינה" בונים גיטרות ומנדולינות. לשם כך משתמשים במכונת הרכבה ובמכונת כיול (כיוונון). מכונת ההרכבה זמינה ל- 36 שעות עבודה בשבוע, ומכונת הכיול זמינה ל- 24 שעות עבודה בשבוע.

בטבלה שלפניכם מוצג מספר השעות הנדרש לייצור כל אחד מסוגי כלי הנגינה בכל מכונה:

הרכבה (בשעות)	כיול (בשעות)	
3	1	גיטרה x
2	2	מנדולינה y



הרווח מייצור גיטרה הוא 100 שקלים, ומייצור מנדולינה 150 שקלים.

א. רשמו מערכת אילוצים.

ב. כתבו פונקציית מטרה לרווח מייצור x גיטרות ו- y מנדולינות.

מנהלת הסדנה מצאה שהרווח היומי המקסימלי מתקבל מייצור 6 גיטרות ו- 9 מנדולינות.

ג. מהו הרווח היומי המקסימלי ?

פתרון

א. טור מכונת ההרכבה (אילוץ קטן או שווה) $3x + 2y \leq 36$

טור מכונת הכיול (אילוץ קטן או שווה) $1x + 2y \leq 24$

ב. הרווח ממכירת x גיטרות הוא $100 \cdot x$

הרווח ממכירת y מנדולינות $150 \cdot y$

פונקציית המטרה $f(x, y) = 100 \cdot x + 150 \cdot y$

ג. לחישוב הרווח המקסימלי מציבים בפונקציית המטרה $x = 6$ ו- $y = 9$

$$f(6, 9) = 100 \cdot 6 + 150 \cdot 9 = 1,950$$

מציאת קודקודים במערכת אילוצים

דוגמה פתורה

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 14 \\ 2x + 3y \leq 24 \end{cases}$$

$$f(x, y) = 5x + 9y$$

לפניכם אילוצים ופונקציית מטרה.

- א. שרטטו את האילוצים במערכת צירים ומצאו את קודקודי מצולע של תחום האילוצים.
- ב. הציבו את שיעורי הקודקודים בפונקציית המטרה

פתרון

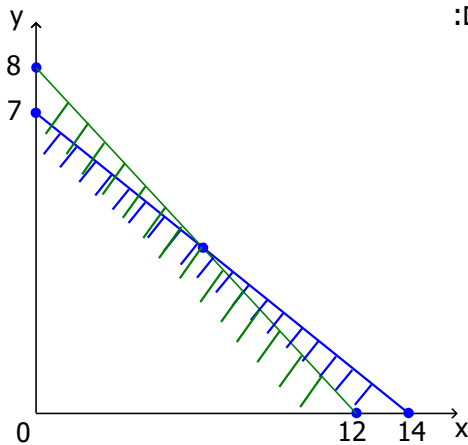
א. שרטטו האילוצים באמצעות נקודות חיתוך עם הצירים:

אילוץ I : עבור $x = 0$ מתקיים $0 + 2y = 14$

ומכאן $y = 7$

עבור $y = 0$ מתקיים $x + 2 \cdot 0 = 14$

ומכאן $x = 14$



נשרטט ישר בין הנקודות $(0, 7)$ ו- $(14, 0)$ וקווקו כלפי מטה

אילוץ II : עבור $x = 0$ מתקיים $2 \cdot 0 + 3y = 24$ ומכאן $y = 8$

עבור $y = 0$ מתקיים $2x + 3 \cdot 0 = 24$ ומכאן $x = 12$

נשרטט ישר בין הנקודות $(0, 8)$ ו- $(12, 0)$ וקווקו כלפי מטה

המשך הפתרון בעמוד הבא

תרגילי חזרה

- (1) סדנת נגרות מייצרת שני סוגי מדפי עץ: מדף עץ מלא ומדף פורמייקה. תהליך הייצור מורכב משני שלבים עיקריים: ניסור וליטוש, ולצורך כך משתמשים במכונת ניסור ובמכונת ליטוש. בטבלה שלפניכם מוצג הזמן הנדרש להכנת יחידה אחת של שני סוגי המדפים:

זמן ליטוש (ליחידה)	זמן ניסור (ליחידה)	
3 דקות	5 דקות	מדף מעץ מלא
6 דקות	4 דקות	מדף פורמייקה

- במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את מכונת הניסור 40 דקות לכל היותר, ואת מכונת הליטוש 42 דקות לכל היותר.
- נסמן ב- x את מספר יחידות מדפי העץ המלא וב- y את מספר יחידות מדפי הפורמייקה שמכינים בסדנה במחזור ייצור אחד.
- א. כתבו מערכת אילוצים בהתאם לנתונים.
- ב. סרטטו את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.
- הרווח של הסדנה ממכירה של מדף מעץ מלא הוא 25 שקלים, והרווח ממכירה של מדף פורמייקה הוא 32 שקלים.
- ג. כתבו את פונקציית המטרה.
- ד. כמה יחידות מכל סוג מדף צריך לייצר בסדנה במחזור ייצור אחד כדי שהרווח יהיה מקסימלי? ומהו הרווח המקסימלי?